Un tastet de topologia algebraica

Laura Brustenga i Moncusí (UCPH) i Martí Prats Soler (Aalto Yliopisto - UAB)

Un dels temes clàssics de les matemàtiques aplicades a ciències socials del batxillerat és la programació lineal, és a dir, l'optimització de funcions lineals sobre conjunts delimitats per un conjunt finit d'hiperplans. En particular, el domini on busquem el màxim és un políedre convex i pot ser descrit com el conjunt de solucions d'un nombre finit d'inequacions lineals. Els políedres són els objectes de treball del programa que avui volem visitar: el `polymake`.

No dubteu a fer-nos arribar les vostres suggerències a `brust@mat.uab.cat` o a `mprats@mat.uab.cat`.

*

Polymake El `polymake` és un programa de codi lliure enfocat a la recerca en geometria de políedres. Va ser desenvolupat des del 1997 al grup de geometria discreta de la Universitat Tècnica de Berlín per Ewgenij Gawrilow i Michael Joswig.

El programa està format per diverses aplicacions destinades a treballar determinats objectes matemàtics: `fan`, `fulton`, `graph`, `group`, `matroid`, `polytope`, `topaz` i `tropical`.

Aquest software incorpora `polymake-perl`, una extensió del llenguatge de programació `Perl`, que es fa servir tant per fer córrer el programa interactivament com per escriure *scripts*.

*

Polytope L'aplicació per defecte és `polytope`, que està enfocada a treballar amb polítops. Per polítop entenem l'envolupant convexa d'un conjunt finit de punts. Es tracta, doncs, d'un políedre convex i acotat, delimitat per hiperplans. Els objectes es poden crear a través d'una col·lecció de punts o d'una llista de semiespais.

```
$p1 = new Polytope(POINTS => [[1,−1,−1], [1,1,−1],
      [1,−1,1], [1,1,1], [1,0,0]]);
$p2 = new Polytope(INEQUALITIES => [[0,1,0,0],
      [0,0,1,0], [0,0,0,1], [1,−1,−1,−1]]);
```

Ens fixem que en el primer polítop, definit a partir de punts, cal usar coordenades homogènies. Es tracta doncs, en aquest cas, d'una llista de cinc punts del pla: $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ i $(0,0)$. Hem definit el quadrat de costat 2 centrat a l'origen. El darrer punt és redundant i no aporta res a la definició:

```
print $p1−>VERTICES;
1 −1 −1
1 1 −1
1 −1 1
1 1 1
```

En el segon cas, la llista de valors de cada desigualtat comença pel terme independent i després els coeficients de cada coordenada de la desigualtat $b + \sum_{j \leq n} a_j x_j \geq 0$.

```
print_constraints($p2−>INEQUALITIES);
0: x1 >= 0
1: x2 >= 0
2: x3 >= 0
3: −x1 − x2 − x3 >= −1
```

Es tracta, doncs, d'un símplex tridimensional.

També podem cridar polítops "famosos" des de la biblioteca. Per exemple, un hipercub es pot crear mitjançant `cube(4)`. Els sòlids platònics, arquimedians, de Catalan o de Johnson estan incorporats al programa. Per exemple, la giro-birotonda pentagonal allargada o 43è sòlid de Johnson es pot obtenir així:

```
$p3=johnson_solid(43);
```

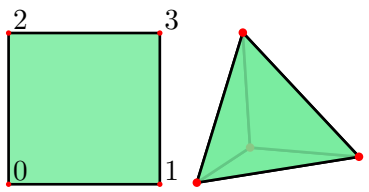
Com insinuàvem a la introducció, una de les aplicacions de polymake és la programació lineal. Així, per trobar $\max\{2x_1 - 3x_2 + x_3 : x \in \mathrm{p2}\}$, podem fer els següents passos:

```
$Lp = new LinearProgram(LINEAR_OBJECTIVE
      =>[0,2,−3,1]);
$program = new Polytope($p2, LP=>$Lp);
print $program−>LP−>MAXIMAL_VALUE;
print $program−>LP−>MAXIMAL_VERTEX;
```

(vegeu [1, Part I, Chapter IV]).

`Polymake` permet fer representacions interactives dels polítops o bé exportar a TikZ per als que escriuen amb LaTeX.

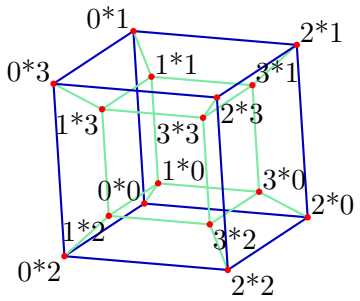
```
$p1−>VISUAL;
tikz($p2−>VISUAL(VertexLabels=>"hidden"), File=>"./
      imatges_N47/simplex.tikz");
```



Representació del quadrat i el símplex

També podem crear un diagrama de Schegel manipulable per a polítops de quatre dimensions:

```
product($p1,$p1)->VISUAL;
```



Representació de l'hipercub resultant de multiplicar el quadrat per si mateix.

Per dimensions arbitràries podem crear el diagrama de Hasse, que mostra la incidència de les cares de dimensió j amb les de dimensió $j \pm 1$ per $-1 < j < n$, on n és la dimensió del polítop.

```
$p1->VISUAL_FACE_LATTICE();
product($p1,$p2)->VISUAL_FACE_LATTICE(
    PointLabels=> [""]);
```

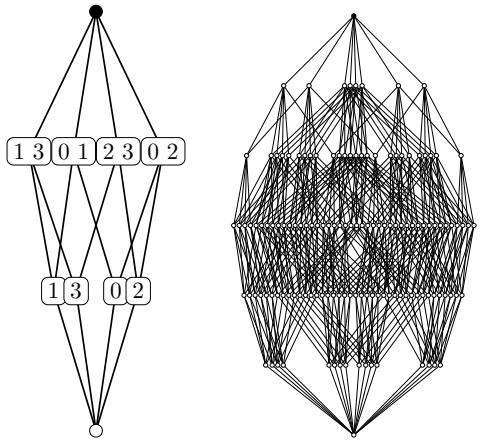
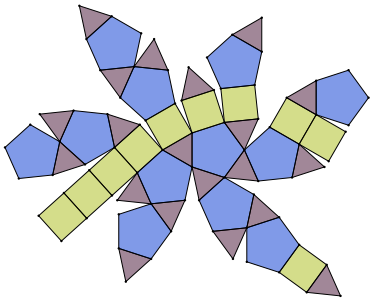


Diagrama de Hasse del quadrat i del producte del quadrat pel símplex de tres dimensions

*

Fan Un complex poliedral on tots els políedres són cons s'anomena en anglès *fan* (ventall). L'aplicació `fan`, entre moltes altres coses, conté codi per extreure desenvolupaments plans dels polítops. A continuació mostrem com dibuixar el desenvolupament de la girobirotonda pentagonal allargada de manera que el color de la cara depengui del nombre d'arestes que té:

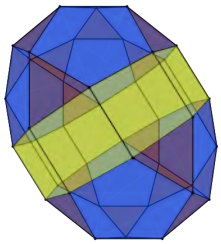
```
application('fan');
$net=planar_net($p3);
@colors=('#441032','#AABB15','#0035D1');
$net->VISUAL(VertexLabels=>"hidden",VertexColor=>"
    black",FacetTransparency=>0.5,FacetColor=>sub {
    $colors[$net->MAXIMAL_POLYTOPES->[shift
    ]->size-3] });
```



Desenvolupament pla de la girobirotonda pentagonal allargada

Finalment, podem dibuixar el políedre amb el mateix codi de colors:

```
$p3->VISUAL(VertexLabels=>"hidden",VertexColor=>"
    black",FacetTransparency=>0.5,FacetColor=>sub {
    $colors[$net->MAXIMAL_POLYTOPES->[shift
    ]->size-3] });
```



Girobirotonda pentagonal allargada

Si us agrada jugar amb desenvolupaments plans, un equip de polymake ha creat una web per practicar amb la seva identificació.[22]

*

Topaz

En triangular una varietat s'obté un complex simplicial.

```
application('topaz');
$cb = polytope::cube(2);
$tcb = $cb->TRIANGULATION;
```

[22] https://matchthenet.de/

`Topaz` permet calcular els grups d'homologia i cohomologia d'aquests i, més en general, de qualsevol complex.

Els complexos es representen de forma abstracta on cada símplex és un conjunt de vèrtexs numerats. Per exemple, un cilindre o una cinta de Möbius es donen com

```
$ci = new SimplicialComplex(INPUT_FACES=>
[[1,2,3],[1,3,4],[3,4,5],[4,5,6],[5,6,2],[6,2,1]]);
$mo = new SimplicialComplex(INPUT_FACES=>
[[1,2,3],[1,3,4],[3,4,5],[4,5,6],[5,6,1],[6,1,2]]);
```

Podem veure que homològicament són equivalents, però difereixen del cub o l'ampolla de Klein:

```
print $ci->HOMOLOGY;
print $mo->HOMOLOGY;
print $tcb->HOMOLOGY;
print klein_bottle()->HOMOLOGY;
```

Les opcions de visualització depenen de la dimensió, com en el cas dels polítops.

```
$cb->VISUAL;
$mo->VISUAL;
$tcb->VISUAL_FACE_LATTICE;
```

*

Precaucions En instal·lar el programa, cal estar alerta, ja que no és tan robust com, per exemple, el `GeoGebra`. El segon autor ha tingut nombrosos problemes per fer la instal·lació automàtica en un portàtil Mac, problemes que s'han resolt en seguir les instruccions per fer la compilació pas a pas que es poden trobar al lloc web del programa, on, per cert, el lector pot trobar uns tutorials molt pràctics per aprendre a fer funcionar aquest programari.

Referències

[1] Michael Joswig and Thorsten Theobald, "Polyhedral and Algebraic Methods in Computational Geometry". Springer, 2013.

Matemàtiques i empresa

Quin és l'efecte d'una nova pàgina web sobre els nostres usuaris?

Maria Esteller (Estudiant de doctorat UPC-Seat), Aleix Ruiz de Villa (consultor Data Science), Diego Villuendas (CRM & Global Head of Data, Analytics, Seat)

En aquest número de la revista *SCM/Notícies* parlarem d'una petita col·laboració entre la Societat Catalana de Matemàtiques i la Seat. Es tracta de mostrar un tipus de problemes que poden sortir sovint en el món empresarial.

Bona part de la nova onada d'anàlisi de dades es deu al fet que en el món digital hi ha un gran volum i varietat de dades que permeten a les empreses prendre decisions de manera més informada. Això va donar peu a un optimisme inicial que va fer que les empreses s'animessin a treure estadístiques de molts tipus i d'una manera continuada. Semblava que calcular mitjanes i valors agregats no havia de ser tan difícil, no? Per sort per als matemàtics i estadístics, això no és tan senzill. La realitat és que les dades no parlen per si mateixes, i que moltes vegades plantegen tot un seguit de trampes (a través de biaixos, dades que falten i efectes de la incertesa) que fàcilment fan confondre els modelitzadors.

Parlarem d'un problema tan senzill com si una empresa desenvolupa una nova pàgina web, com es pot saber si la nova pàgina funciona millor o pitjor que l'antiga. En aquest cas, la Seat té una pàgina global, `seat.com`, i pàgines diferents per a cada país. El març del 2019 va desenvolupar una nova versió per a la pàgina francesa, `Seat.fr`, i la va fer pública. Posteriorment Seat va mesurar indicadors com el nombre de visites, el nombre d'usuaris únics, quant temps passaven a cada pàgina, etc.

Prenguem un indicador de referència: el nombre de visites de cada usuari, per exemple. Podem calcular la diferència de visites abans i després del canvi. Malauradament, les èpoques de l'any són diferents. Potser la gent té més tendència a comprar menys cotxes al gener i febrer, per tenir el Nadal a prop, que al març o l'abril. O a